Todennäköisyys

- Kurssilla esitetään lyhyt katsaus niihin todennäköisyyden ja satunnaisprosessien peruskäsitteisiin ja -ominaisuuksiin, joita tarvitaan digitaalisten tietoliikennejärjestelmien ymmärtämisessä
- Lisätietoja saa esim. oppikirjassa mainituista lähteistä
- Tämä osio käsittelee todennäköisyyttä

Todennäköisyys

- On havaittu, että toistuvan tapahtuman keskiarvo lähestyy jotain vakioarvoa kun toistomäärä kasvaa
- Todennäköisyysteoria käsittelee näitä keskiarvoja
- Tapahtuman A todennäköisyys $\mathrm{P}(A)$ voidaan ymmärtää seuraavasti:
  - Toistetaan koe n kertaa ja havaitaan tapahtuma A n_A kertaa. Silloin, erittäin varmasti, tapahtuman A suhteellinen frekvenssi n_A/n on lähellä lukua

$$\mathrm{P}(A) \simeq n_A/n, \quad \text{kun } n \text{ on riittävän iso} \tag{1}$$

- Esim. 1: heitettäessä reilua kolikkoa 500 kertaa saadaan klaava n. 250 kertaa eli klaavan todennäköisyys $\mathrm{P}(\text{klaava}) = 1/2$, joka vastaa havaintoa että kolikossa on kaksi puolta ja rahan heitossa molempien puolien esiintymistodennäköisyys on sama

- Esim. 2: heitettäessä reilua noppaa 600 kertaa esiintyy yksittäinen silmäluku noin 100 kertaa eli P(yksittäisen silmäluvun todennäköisyys) = 1/6
- Toisinpäin: jos tiedetään tapahtuman todennäköisyys, niin voidaan arvioida kuinka usein se esiintyy kokeessa
  - Esim. Olkoon arvioitu bittivirhesuhde $P_b = 10^{-3}$. Tällöin jokaista lähetettyä tuhatta bittiä kohti tapahtuu yksi virhe $P_b \times 1000 = 10^{-3} \times 1000 = 1$. Jokaista miljoonaa bittiä kohti tapahtuu 1000 virhettä $P_b \times 1000000 = 10^{-3} \times 10^6 = 1000$

Joukko

- Joukko S koostuu alkioista $s_i,\ i = 1, \ldots, n$ eli

$$S = \{s_1,\ s_2,\ \ldots, s_n\} \tag{2}$$

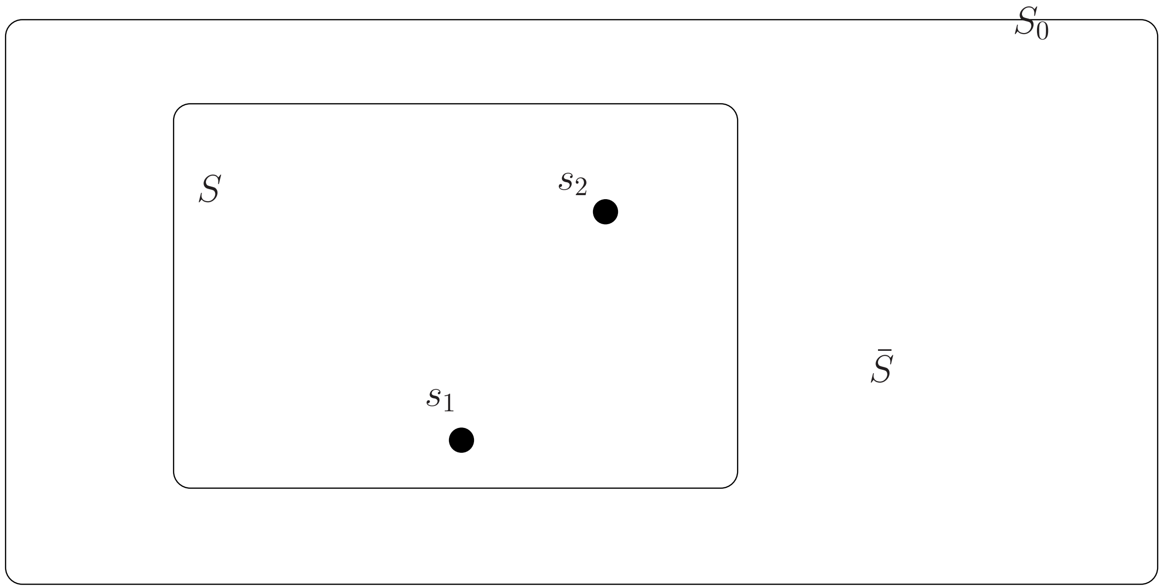
ja

$$s \in S \tag{3}$$

- Joukko S on usein jonkin suuremman joukon S_0 osa (osajoukko), mutta voi olla myös sama kuin joukko S_0 eli

$$S \subseteq S_0 \tag{4}$$

- Joukon S_0 ne osat jotka eivät kuulu joukkoon S muodostavat joukon S komplementaarisen joukon eli komplementin $\bar{S}$



Joukko S_0, osajoukko S ja sen komplementti $\bar{S}$

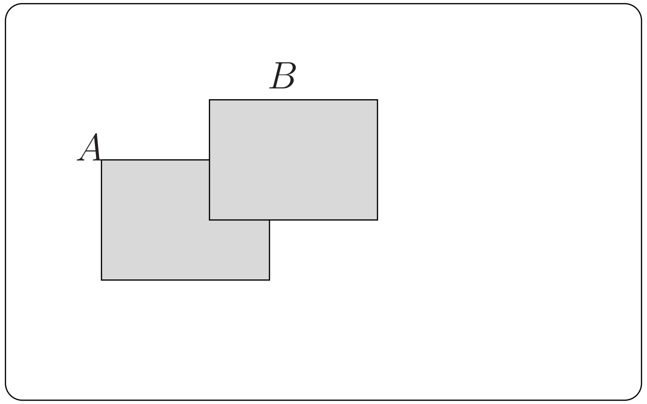
- Joukkojen A ja B *unionia* merkitään $A \cup B$ ja se tarkoittaa molempien joukkojen kaikkien elementtien muodostamaa joukkoa eli

$$S = A \cup B = \{s \in S : \ s \in A \text{ tai } s \in B\} \tag{5}$$

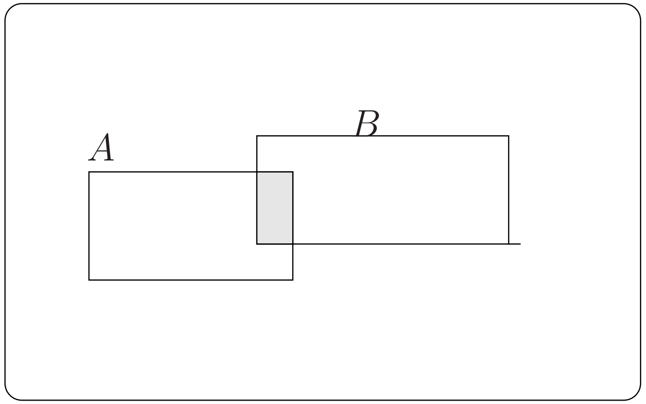
- Joukkojen A ja B *leikkausta* merkitään $A \cap B$ ja se tarkoittaa joukkojen yhteisten elementtien muodostamaa joukkoa eli

$$S = A \cap B = \{s \in S : \ s \in A \text{ ja } s \in B\} \tag{6}$$

- Joukojen A ja B sanotaan olevan *keskenään poissulkevia* tai toisensa poissulkevia (mutually exclusive) jos niiden leikkaus on tyhjä joukko eli $A \cap B = \emptyset$



unioni $A \cup B$ on harmaa alue



leikkaus $A \cap B$ on harmaa alue

Määritelmiä

- *Näytepiste* (otos) on kokeen yksittäinen tulos
- *Näyteavaruus* (otosavaruus) S on kaikkien mahdollisten näytepisteiden joukko
- *Tapahtuma* joko tapahtuu tai sitten ei kun koe suoritetaan
- Tapahtuma A on joukon S osajoukko ($A \subset S$), joka sisältää ne joukon S alkiot joille tapahtuma tapahtuu
- Tapahtuma A tapahtuu jos ja vain jos kokeen ulostulo s on joukon A osa eli $s \in A$.

Todennäköisyysavaruus

- Näyteavaruus S on todennäköisyysavaruus jos ja vain jos jokaiseen tapahtumaan A kaikkien mahdollisten tapahtumien joukossa (Ω) on liitettävissä numero $\mathrm{P}(A)$ joka täyttää seuraavat *aksioomat*

$$0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1 \tag{7a}$$

$$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i) \text{ jos ja vain jos } A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j = 1, 2, \ldots \tag{7b}$$

$$P(S) = 1 \quad \text{(ns. varma tapahtuma)} \tag{7c}$$

- Itse asiassa joukon Ω täytyy olla kenttä (field) eli joukkojen $A \in \Omega$ ja $B \in \Omega$ leikkaus, unioni ja komplementit kuuluvat myös joukkoon Ω. Tämä vaaditaan, jotta joukko-opin kaikki järkevät operaatiot olisivat käytettävissä

- Yleisesti pätee $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$, kuten leikkausta esittävästä kuvasta helposti nähdään

- Esimerkki
  - Nopan tapauksessa todennäköisyyssavaruus

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  - Olkoon tapahtuma

$$A = \{2, 4\}$$

  - Silloin tapahtuman A komplementti

$$\bar{A} = \{1, 3, 5, 6\}$$

  - Selvästi $A \subset S$, $\bar{A} \subset S$, $A \cup \bar{A} = S$ ja $A \cap \bar{A} = \emptyset \subset S$, sillä tyhjä joukko on jokaisen näyteavaruuden osa

– Olkoot tapahtumat

$$B = \{1, 3, 6\} \quad \text{ja} \quad C = \{1, 2, 3\}$$

– Tapahtumat $A = \{2, 4\}$ ja B ovat keskenään poissulkevia eli niillä ei ole yhteisiä alkioita eli $A \cap B = \emptyset$. Havaitaan myös että $A \cap B \subset S$, $B \subset S$ ja $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\} \subset S$

– Tapahtumat B ja C eivät ole keskenään poissulkevia sillä $B \cap C = \{1, 3\}$. Joukojen unioni $B \cup C = \{1, 2, 3, 6\}$

– Reilun nopan tapauksessa jokaisen silmäluvun todennäköisyys on 1/6. Nyt

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\mathrm{P}(B \cup C) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B \cap C) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Yhteistodennäköisyys

- Joskus tarkastellaan usean tapahtuman muodostamaa kokonaisuutta
- Esim. kahden nopan heittoa tai kahta peräkkäistä heittoa
- Silloin näyteavaruus S_A on yksittäisten näyteavaruuksien S_{A_i}, $i = 1, \ldots, n$ karteesinen tulo eli

$$S_A = S_{A_1} \times S_{A_2} \times \cdots \times S_{A_n} \tag{8}$$

- Esimerkkejä:
  - Kaksi noppaa n_1 ja n_2, joissa kokeissa tulokset $n_i(j), j = 1, \ldots, 6$
  - Näyteavaruus sisältää 36 pistettä $\big(n_1(l), n_2(k)\big)$ kuten (1,1), (1,2), (2,1), jne.
  - Yhden pisteen todennäköisyys on $1/36$

- Kaksi kolikkoa, mahdollisia ulostuloja 4, (kruuna,kruuna), (kruuna,klaava), (klaava,kruuna), (klaava,klaava), jokaisen todennäköisyys 1/4 (jos järjestyksellä on väliä)
- Todennäköisyys että nopan ja rahan heitossa saadaan pari (kruunu,2)= $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ (avaruudessa 12 pistettä)

- Olkoon kyse kaksoiskokeesta ja olkoot $A_i,\ i = 1, \ldots, n$ ja $B_j,\ j = 1, \ldots, m$ mahdolliset tapahtumat
- Silloin tapahtumien yhteistodennäköisyydelle pätee

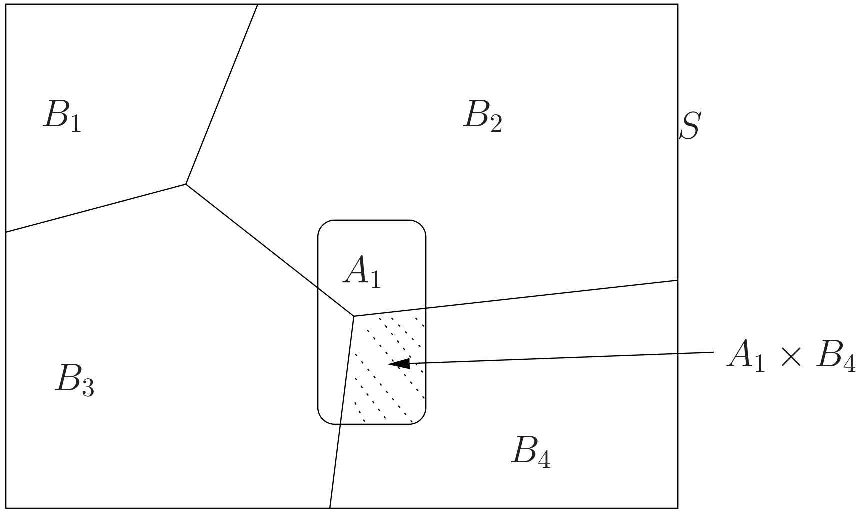
$$0 \leq \mathrm{P}(A_i, B_j) \leq 1 \tag{9}$$

- Jos tapahtumat B_i ovat keskenään poissulkevia, niin

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}(A_i, B_j) = \mathrm{P}(A_i, S_B) = \mathrm{P}(A_i) \tag{10}$$

- Tämä tarkoittaa sitä, että tapahtuma A_i tapahtuu huolimatta siitä mitä tapahtuu S_B:ssä

- Mistä tämä johtuu? Tilanne on helpoin selittää seuraavan kuvan avulla.



Selvästi $A_1 = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \times \cdots$
Koska B_i:t keskenään poissulkevia, niin
$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_1, S_B) = \mathrm{P}(A_1 \times B_1) + \mathrm{P}(A_1 \times B_2) + \ldots$
$= \mathrm{P}(A_1, B_1) + \mathrm{P}(A_1, B_2) + \ldots$

- Jos kaikki mahdolliset tapahtumat A_i ja B_j ovat keskenään poissulkevia, niin

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}(A_i, B_j) = 1 \tag{11}$$

- Tämä johtuu tietysti siitä, että kaikkien mahdollisten tapahtumien unioni kattaa koko todennäköisyysavaruuden

Ehdollinen todennäköisyys

- Tarkastellaan yhdistettyä koetta, jossa tapahtumien A ja B yhteistodennäköisyys on $\mathrm{P}(A, B)$
- Oletaan että tapahtuma B on jo tapahtunut
- Nyt halutaan tietää mikä on tapahtuman A todennäköisyys
- Tätä kutsutaan ehdolliseksi todennäköisyydeksi
- Tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys kun tapahtuma B on jo tapahtunut on (määritelmä)

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A, B)}{\mathrm{P}(B)} \tag{12}$$

  olettaen että $\mathrm{P}(B) > 0$
- Ehdolliset todennäköisyydetkin täyttävät todennäköisyysaksioomat (7)

- Ehdollisesta todennäköisyydestä (12) seuraa että

$$\mathrm{P}(A, B) = \mathrm{P}(A \mid B)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \mid A)\,\mathrm{P}(A) \tag{13}$$

- Yhden kokeen tapauksessa:
  - Jos $A \subset B$, niin $A \cap B = A$ ja

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} \tag{14}$$

  - Jos $B \subset A$, niin $A \cap B = B$ ja

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = 1 \tag{15}$$

- Olkoon todennäköisyysavaruus S_A jaettu keskenään poissulkeviin joukkoihin (tapahtumiin) A_i, eli $S = \cup_{i=1}^{n} A_i$ ja olkoon B jokin tapahtuma
- Silloin $B = B \times S_A = B \times (A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$ ja
- $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B, A_1) + \cdots + \mathrm{P}(B, A_n)$
- Käyttämällä tähän ehdollista todennäköisyyttä (12) saadaan

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \,|A_1)\,\mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(B \,|A_n)\,\mathrm{P}(A_n) \tag{16}$$

  joka tunnetaaan nimellä *totaalinen todennäköisyysteoreema* (total probability theorem)
- Yhtälöstä (13) seuraa, että

$$\mathrm{P}(A_i \mid B) = \mathrm{P}(B \mid A_i)\frac{\mathrm{P}(A_i)}{\mathrm{P}(B)} \tag{17}$$

- Käyttämällä tässä totaalista todennäköisyysteoreemaa (16) saadaan

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)\,P(A_i)}{P(B\mid A_1)\,P(A_1) + \cdots + P(B\mid A_1)\,P(A_n)} \qquad (18)$$

  joka tunnetaan nimellä *Bayesin teoreema* (Bayes' theorem)
- Käyttökelpoinen jos todennäköisyyttä $P(A_i \mid B)$ ei tunneta, mutta $P(B \mid A_i)$ tunnetaan
- Bayesin teoreemaa käytetään mm. kun DTS kurssilla johdetaan tiedonsiirtojärjestelmien suorituskykyjä

- Esimerkkejä:
  - Tarkastellaan nopan heittoa kahdesti ja halutaan tietää mikä on todennäköisyys että toisella heitolla (A) saadaan 2, kun ensimmäisellä heitolla (B) saatiin 1.
  - Tällöin

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A, B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \tag{19}$$

  - Olkoot yhdessä nopanheitossa tapahtumat $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{1, 3, 6\}$. Tällöin yhdistetty tapahtuma on $A, B = \{1, 3\}$. Halutaan tietää joukon A todennäköisyys kun B on tapahtunut.

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A, B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} \tag{20}$$

Tilastollinen riippumattomuus

- Tapahtumien tilastollinen riipumattomuus on tärkeä, usein käytetty käsite
- Se tarkoittaa sitä, että toisen tapahtuman tapahtumisella ei ole mitään tekemistä toisen tapahtuman kanssa
- Esim. kun heitetään reilua noppaa, niin seuraavan heiton silmäluku ei mitenkään riipu edellisestä silmäluvusta
- Määritelmä: Tapahtumat A ja B ovat *tilastollisesti riippumattomia* jos

$$\mathrm{P}(A, B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \tag{21}$$

- Yleisemmin: tapahtumat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ovat riippumattomia jos $\mathrm{P}(A_1, \ldots, A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdots \mathrm{P}(A_n)$
- Riippumattomien tapahtumien yhteistodennäköisyys on siis yksittäisten tapahtumien todennäköisyyksien tulo!

- Esimerkkejä
  - Mikä on todennäköisyys että peräkkäiset nopan heitot antavat tuloksen 1,2,3? Se on $\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{216} = 0,005$
  - Olkoon nopan heitossa tapahtuma $A = \{\text{parilliset luvut}\} = \{2, 4, 6\}$. Mikä on todennäköisyys että tapahtuma A tapahtuu kahdella peräkkäisellä heitolla?
  - Tiedetään, että nopanheitot ovat riippumattomia, joten todennökoisyys on $\mathrm{P}(A, A) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
  - Sama tulos saadaan myös tarkastelemalla avaruutta (nopan heitto$\times$ nopan heitto) jossa parillisia pareja $(A \times A)$ on 9 36:sta mahdollisuudesta eli haluttu todennäköisyys on $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$